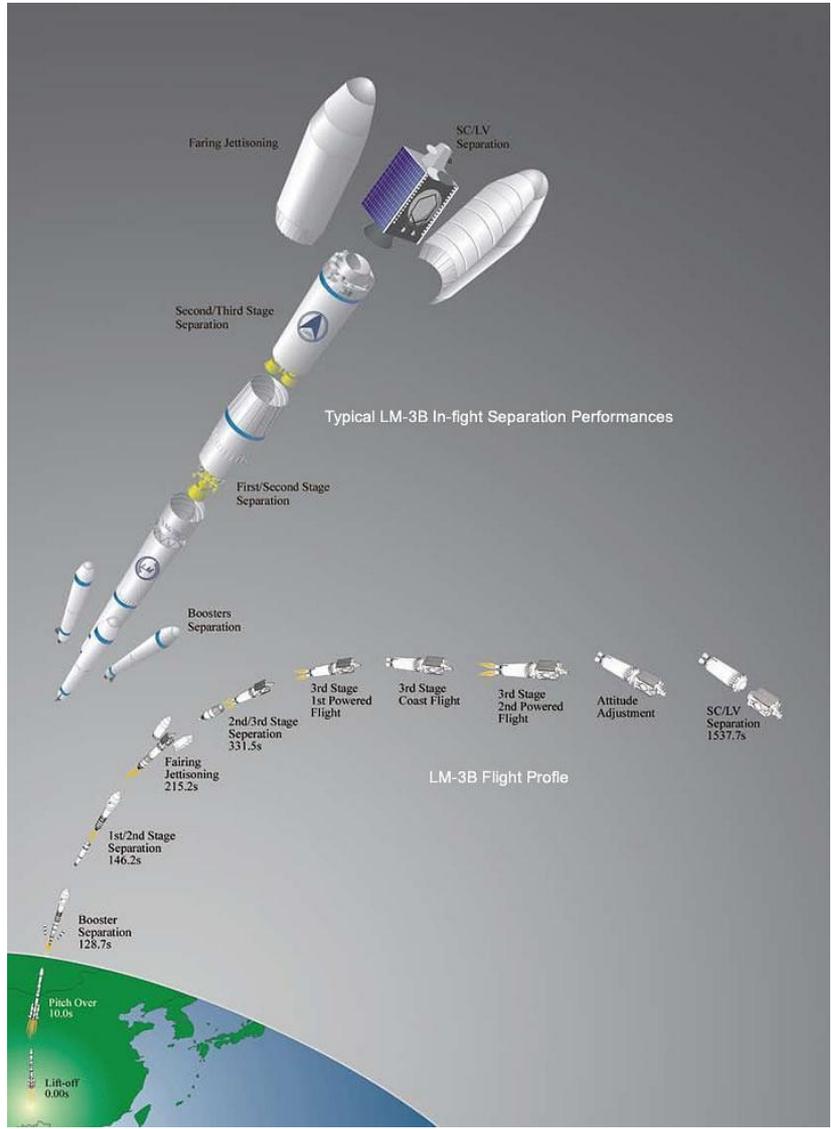


动量守恒定律及其应用

2021.04.24





1、动量守恒定律

$$(\sum \vec{F}_i)dt = d\vec{p}$$

若 $\sum \vec{F}_i = 0$: $\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i = \text{恒矢量}$

质点系所受的合外力为零时，质点系的总动量守恒。

说明

(1) 守恒的条件： $\vec{F}_{\text{合力}} = 0$

不是合冲量为零！

(2) 常用分量式：

$$\sum F_x = 0 \quad \sum m_i v_{ix} = \text{恒量}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \sum m_i v_{iy} = \text{恒量}$$

$$\sum F_z = 0 \quad \sum m_i v_{iz} = \text{恒量}$$

若某一方向上合外力为零，在该方向上动量守恒。

(3) 若系统内力远大于外力（如碰撞、打击、爆炸等），可近似认为动量守恒。



4. 只适用于惯性系

5. 动量守恒定律是比牛顿定律更普遍、更基本的定律，它在宏观和微观领域均适用。

例：以下说法是否正确？为什么？

1、外力对系统做功为零，则该系统动量守恒。

做功为零，合外力不一定为零

2、某一系统 t_1 时刻和 t_2 时刻动量相等，则我们可以说从 t_1 到 t_2 这段时间内系统的动量守恒。

中间过程动量不一定相等

例：火箭以 $2.5 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率水平飞行,由控制器使火箭分离.头部仓 $m_1=100\text{kg}$,相对于地面的平均速率为 $10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.火箭容器仓质量 $m_2=200\text{kg}$.求容器仓和头部仓相对于地面的速率.

解：设火箭速率为 v , 头部仓相对速率为 v_r

相对于地：头部仓速率为 v_1 , 容器仓速率为 v_2

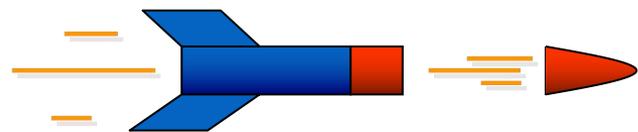
$$v_1 = v_r + v_2$$

根据动量守恒定律

$$(m_1 + m_2)v = m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 (v_2 + v_r) + m_2 v_2$$

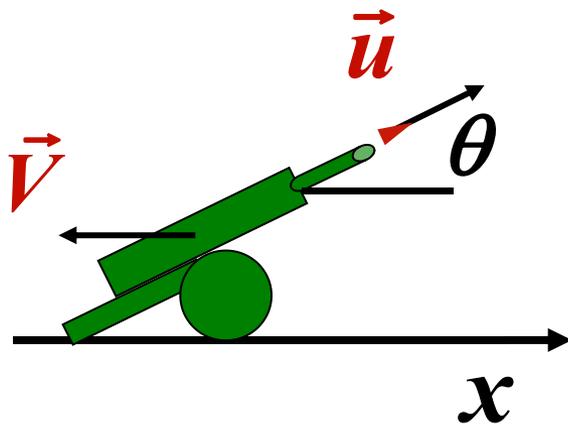
$$v_2 = v - \frac{m_1 v_r}{m_1 + m_2} = 2.17 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_1 = v_2 + v_r = 3.17 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



2、动量守恒定律的应用

例：如图所示，一辆停在水平地面上的炮车以仰角 θ 发射一颗炮弹，炮弹的出膛速度相对于炮车为 u ，炮车和炮弹的质量分别为 M 和 m 。忽略地面的摩擦，试求：炮车的反冲速度。



解：以炮弹和炮车为系统，选地面为参考系。

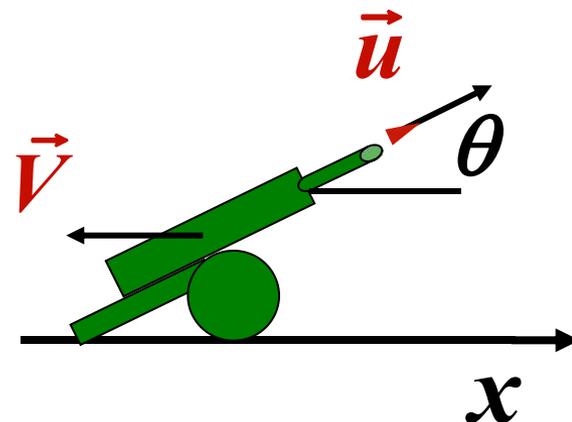
系统在水平方向动量守恒。

炮车对地速度： \vec{V}

炮弹对地速度： $\vec{v} = \vec{u} + \vec{V}$

由x方向动量守恒：

$$MV + mv_x = 0$$

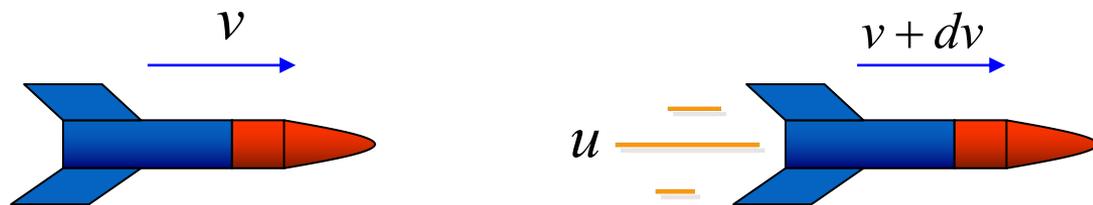


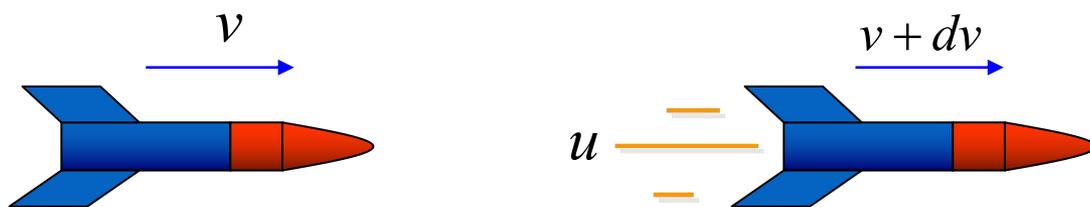
$$v_x = u \cos \theta + V$$

$$\therefore V = -\frac{m \cos \theta}{m + M} u$$

例：火箭的速度

火箭在外层高空飞行。设在某一时刻 t ，火箭的质量为 m ，速度为 v ，在其后 t 到 $t+dt$ 时间内，火箭喷射出了质量为 dm （ dm 为质量 m 在 dt 时间内的增量）的气体，喷出的气体相对火箭的速度为 u ，使火箭的速度增加了 dv 。设火箭开始飞行时速度为零，质量为 m_0 ，燃料烧尽时，火箭剩下的质量为 m_1 ，求此时火箭能达到的速度？





解：火箭在外层高空飞行，空气阻力和重力的影响可以忽略，所以系统的总动量保持不变，依据动量守恒定律有

$$mv = (m + dm)(v + dv) + (-dm)(v + dv - u)$$

展开后略去二阶无穷小量 $dmdv$ ，得

$$mdv + udm = 0$$

$$dv = -u \frac{dm}{m}$$

$$dv = -u \frac{dm}{m}$$

将上式两边积分 $\int_0^v dv = \int_{m_0}^{m_1} -u \frac{dm}{m}$

齐奥尔科夫斯基公式 $v = \int_{m_0}^{m_1} -u \frac{dm}{m} = u \ln \frac{m_0}{m_1}$

由上式可看出，要提高火箭得速度，可采用提高喷气速度和质量比 $\frac{m_0}{m}$ 的方法。目前技术质量比上限约为15，喷气速度为4km/s。由此求出火箭速度 $v=11km/s$ 。再考虑发射时受引力和空气阻力作用， v 只能到达7km/s。故一般采用多级火箭来提高速度。

