2.5 刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

授课老师：胡家琦

新课导入：

图1 单旋翼直升机

图2 双旋翼直升机

直升机：
- 单旋翼
- 双旋翼

思考：为什么单旋翼的直升机要加尾桨？
而双旋翼的直升机却没有加尾桨？

知识回顾：

刚体——在任何情况下**形状和大小**都**保持不变**的物体.

质点 $\xrightarrow{\text{集合}}$ **质点系** $\xrightarrow{\text{特例}}$ **刚体**

刚体的特点： 任意**两点间**的**距离**始终保持**不变**.

知识回顾：

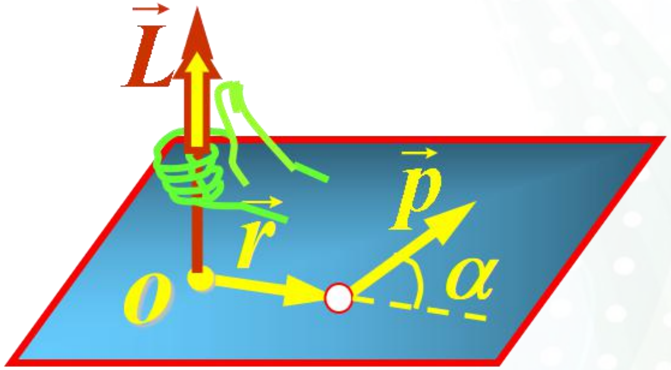
质点对O点的角动量

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times(m\vec{v})$$

大小： $L=rmv\sin\alpha$

方向： $\vec{r}\times m\vec{v}$的方向

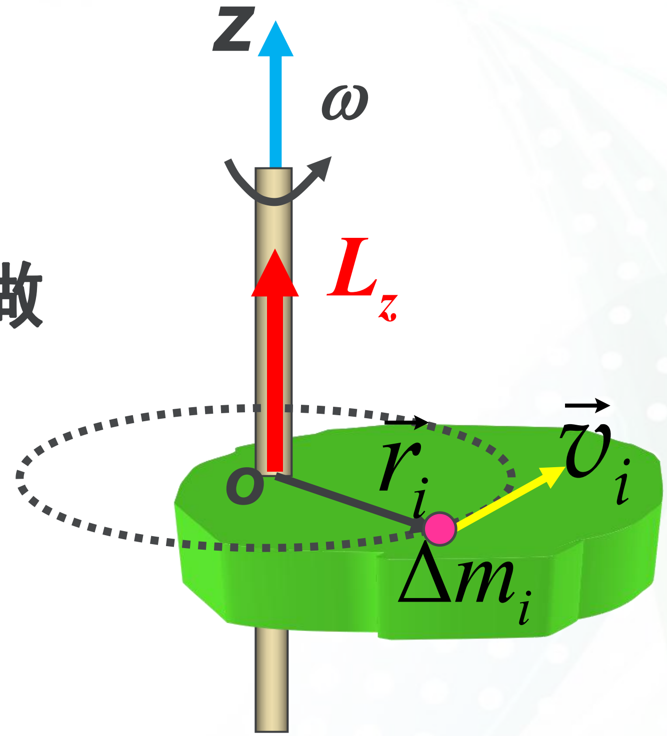
右手螺旋法则确定



1. 刚体定轴转动的角动量

质点对O点的角动量

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$$



刚体上任一质元Δm_i绕固定轴z轴做圆周运动的角动量：

$$L_{iz}=\Delta m_i r_i v_i=\Delta m_i r_i^2\omega$$

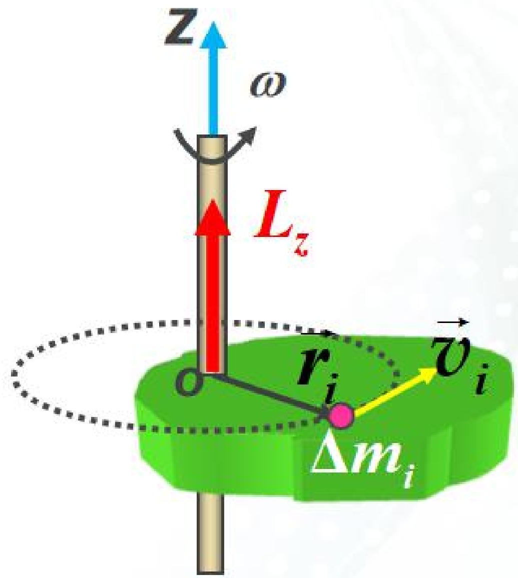
刚体对z轴的总角动量为：

$$L_z=\sum L_{iz}=\sum \Delta m_i r_i^2\omega=\left(\sum \Delta m_i r_i^2\right)\omega\boxed{=J\omega}$$

L_z的方向： 与z轴同向为正，反之，为负。

2.刚体定轴转动的角动量定理

刚体对z轴的总角动量为： $L_z = J\omega$



$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \qquad \beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

刚体定轴转动定律 $M_{外} = J\beta$

$$\Rightarrow \boxed{M_{外} = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}}$$

角动量定理的微分形式:

作用在绕定轴转动刚体上的**合外力矩**等于刚体对该轴的**角动量对时间的导数**。

2.刚体定轴转动的角动量定理

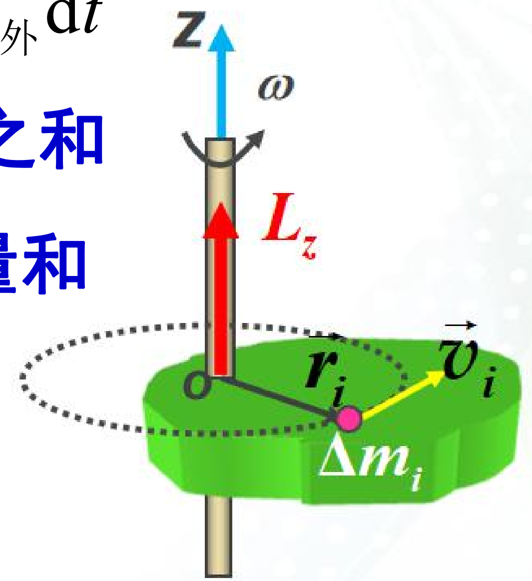
积分形式

$$\mathrm{d}L_z = M_{外}\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M_{外} \cdot \mathrm{d}t = L_{z2} - L_{z1}}$$

称为 冲量矩之和

或力矩的冲量和



$$\int_{t_1}^{t_2} F_{外} \cdot \mathrm{d}t = P_2 - P_1$$ 称为合外力的冲量

角动量定理的积分形式： 在$t_1 \to t_2$时间内，刚体所受**力矩的冲量和**等于该段时间内刚体**角动量的增量**.

说明

（1）$M_{外}$、L_z、J 是对同一轴而言；

（2）代数式表示矢量，注意正负。

3. 刚体定轴转动的角动量守恒定律

思考：L_z在什么情况下是守恒的？

$$\int_{t_1}^{t_2} M_{外} \cdot \mathrm{d}t = L_{z2} - L_{z1} = 0 \qquad \mathrm{d}L_z = M_{外} \mathrm{d}t = 0$$

当：$M_{外} = 0$ 则：$\dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = 0 \quad L_z = J\omega = 常量$

角动量守恒定律：刚体所受**合外力矩**为零，则**刚体的角动量**保持不变.

3. 刚体定轴转动的角动量守恒定律

当：$M_{外} = 0$ 则：$L_z = J\omega = 常量$

说明

① J 不变：刚体

ω 也不变 匀速转动 或 保持静止

② J 变：非刚体

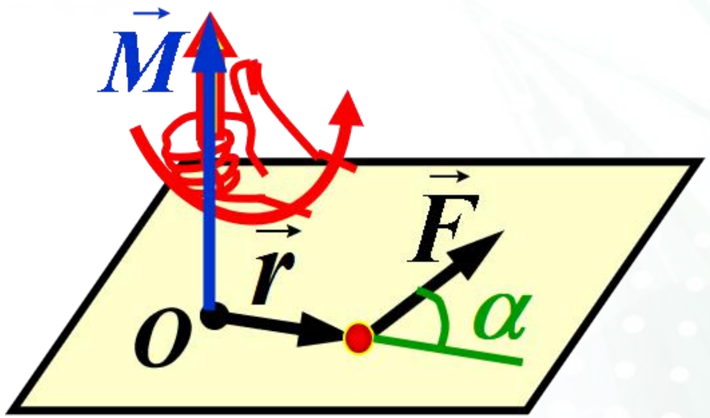
ω 也变 $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$

知识回顾：力对点的力矩

定义： $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$

大小：$M=rF\sin\alpha$

方向：$\vec{r}\times\vec{F}$ 的方向



方向： 右手螺旋

思考：力矩为零，有哪些情况？

$\vec{M}=0$

合力矩： 同时有几个外力作用于刚体上，
合力矩等于各分力矩的代数和。

例题讲解

例1：假设卫星环绕地球中心作椭圆运动，则在运动过程中，卫星对地球中心的

(A) 动量不变, 角动量也不变;

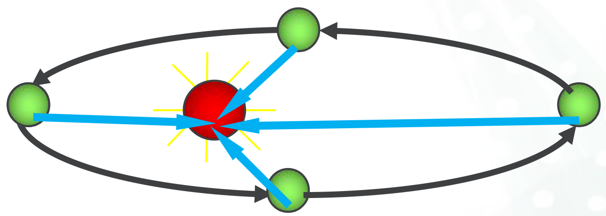
(B) 动量不变, 角动量不断改变;

(C) 动量不断改变, 角动量不变;

(D) 动量不断改变, 角动量也不断改变

例题讲解

例1：假设卫星环绕地球作椭圆运动，则在运动过程中，卫星对地球的



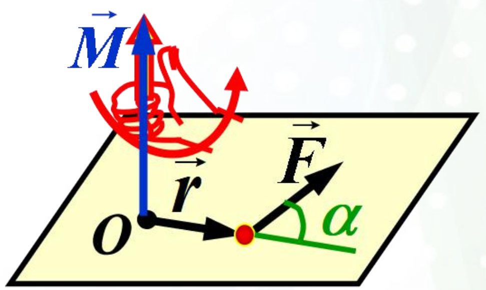
(A) 动量不变, 角动量也不变;

(B) 动量不变, 角动量不断改变;

(C) 动量不断改变, 角动量不变;

(D) 动量不断改变, 角动量也不断改变

［ C ］



解析： **角动量定理** $M = \dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$

卫星环绕地球作椭圆运动，卫星受到地球的引力是**有心力**（力心在地球）。

$M = rF\sin\alpha, \quad \alpha = 0$ 外力矩为0, **角动量**保持不变

有心力对力心的力矩恒为0。

角动量守恒定律在工程技术上的应用

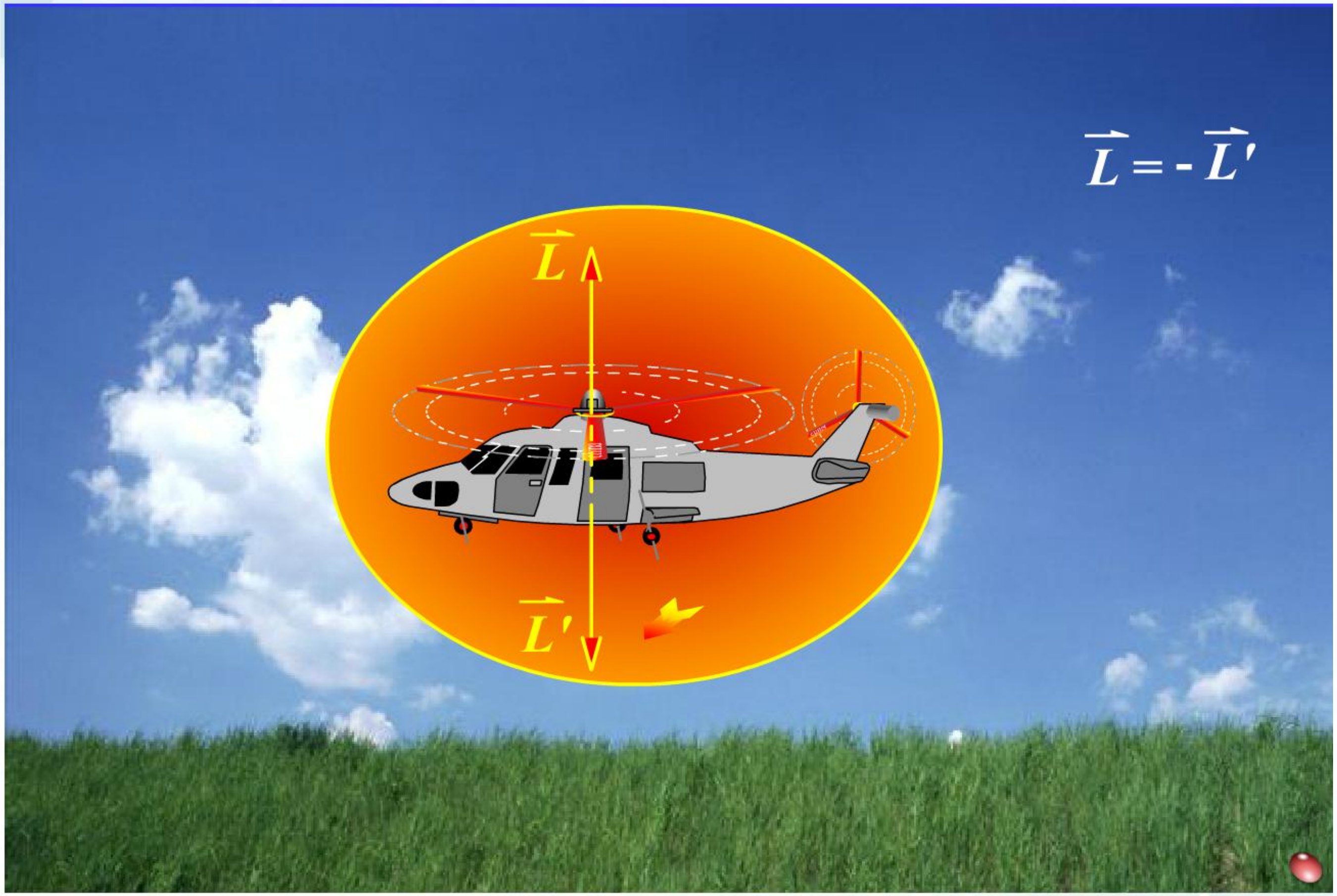
图1 单旋翼直升机

图2 双旋翼直升机

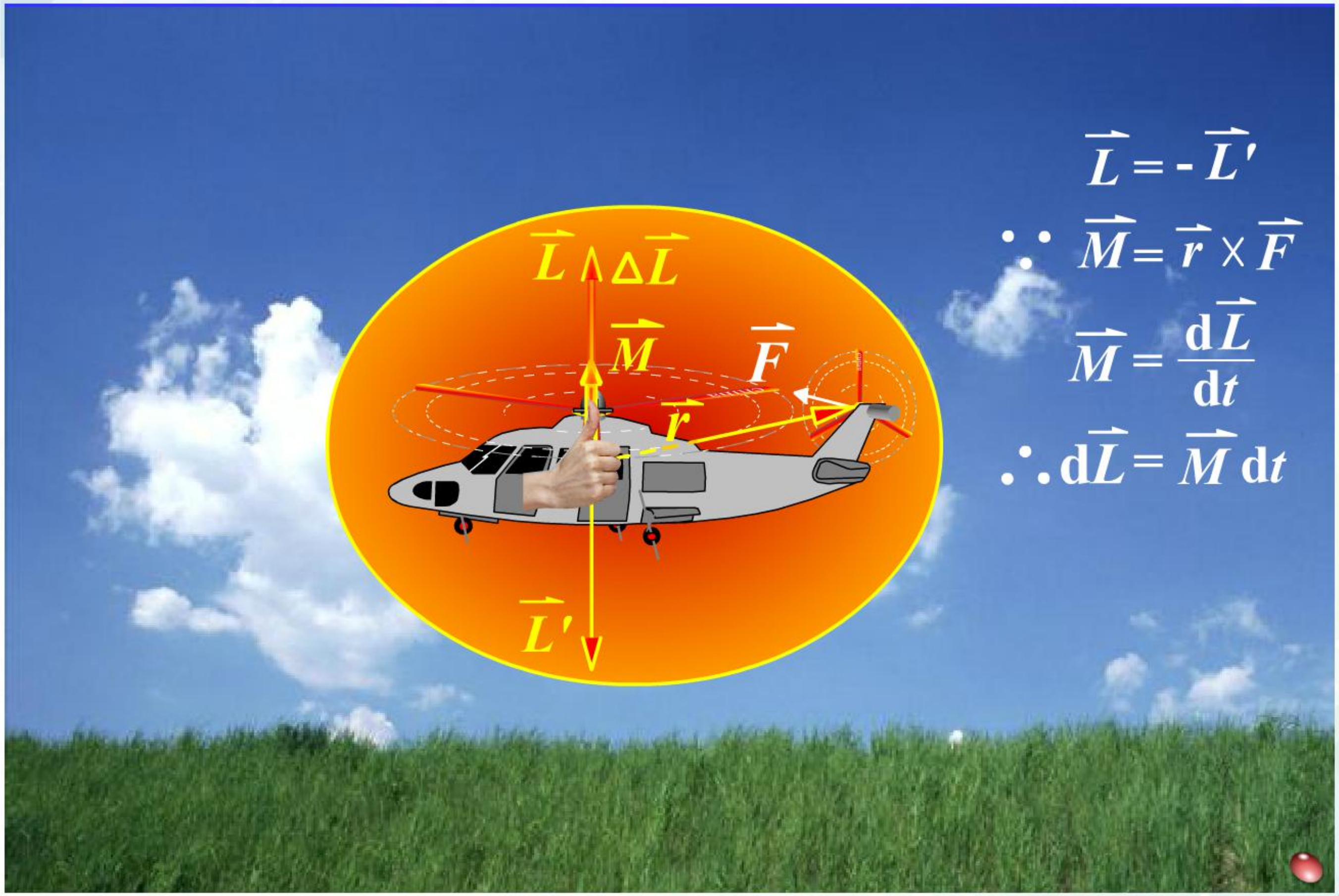
直升机：
- 单旋翼
- 双旋翼

思考：为什么单旋翼的直升机要加尾桨？
而双旋翼的直升机却没有加尾桨？

直升机在发动前，系统的总角动量为零. 一旦发动，旋翼在水平面内高速旋转，系统内出现了**一个竖直向上的角动量**.



根据角动量守恒定律，系统的总角动量必须仍是零. 这种情况下，会出现了**另一个大小相同而方向相反(向下)的角动量**, 机身要作危险的反向旋转.



为了预止机身的反向旋转，在机身尾部装一个在竖直平面内旋转的尾桨，由它来**产生一个水平推力**. 使系统受到一个**向上的推力矩**. 以平衡单旋翼所产生的**机身**的反向旋转了.

- **对转螺旋桨的设置：**双旋翼直升机则无需尾桨，它在直立轴上安装了**一对转向相反的螺旋桨**。工作时它们转向相反，保持系统的总角动量仍然为零。

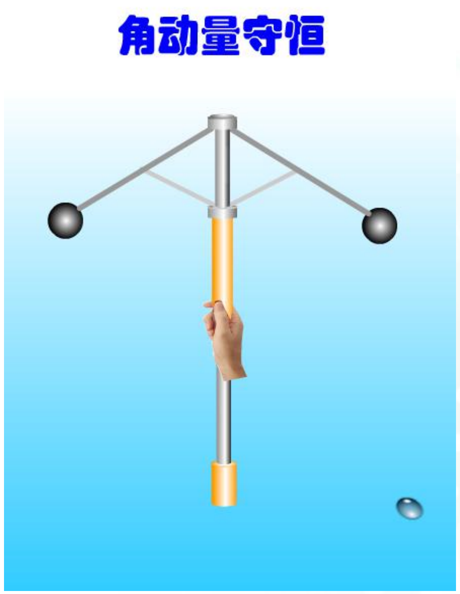
角动量守恒的应用：花样滑冰

播放视频

2010年温哥华冬奥会上，申雪和赵宏博夺得了双人滑的奥运会冠军。

角动量守恒的应用：花样滑冰

J大　　J小



运动员绕通过重心的竖直轴旋转的过程中,她对转轴的角动量守恒。

J 变：非刚体　$J_1\omega_1 = J_2\omega_2$　ω 也变

运动员通过改变身体姿态（转动惯量）来改变转速

艺术美、人体美、物理美相互结合

拓展题

花样滑冰运动员绕通过自身的竖直轴转动，开始时两臂伸开，转动惯量为J_1，角速度为ω_1．然后她将两臂收回，使转动惯量减少为$J_1/3$．这时她转动的角速度变为

(A) $\frac{1}{3}\omega_1$　　(B) $\left(1/\sqrt{3}\right)\omega_1$.

(C) $\sqrt{3}\,\omega_1$　　(D) $3\omega_1$

拓展题

花样滑冰运动员绕通过自身的竖直轴转动，开始时两臂伸开，转动惯量为J_1，角速度为ω_1．然后她将两臂收回，使转动惯量减少为$J_1/3$．这时她转动的角速度变为

(A) $\frac{1}{3}\omega_1$　　(B) $\left(1/\sqrt{3}\right)\omega_1$.

(C) $\sqrt{3}\,\omega_1$　　(D) $3\omega_1$

解析：角动量守恒定律

J 变：非刚体

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2 \quad \omega \text{ 也变}$$

$$J_1\omega_1 = \frac{1}{3}J_1\omega_2 \quad \Rightarrow \omega_2 = 3\omega_1$$

角动量守恒定律在工程技术上的应用

- 陀螺仪与导航

- 西汉“被中香炉”

古人的智慧

课堂小结

1.刚体对z轴的总角动量为：

$$\boxed{L_z = J\omega}$$

2.刚体对定轴的角动量定理

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M_{外} \cdot \mathrm{d}t = L_{z2} - L_{z1}}$$

3.刚体对定轴的角动量守恒的条件

$$\boxed{M_{外} = 0}$$

Thank you!